Chapitre 4

Linéarité Locale et Fonctions implicites

4.1 Linéarité Locale :

4.1.1 Jacobien d'une application :

rappele :(matrice jacobienne)

Définition 46 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$*
On suppose f différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$. La matrice de l'application différentielle de f qu'on l'appelle ***matrice jacobienne*** *de f en a est :*

$$J_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Théoréme 32 *Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$*
Si f est différentiable au point $a \in \mathbb{R}^n$. , alors les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existent pour tout $i \in \{1,2,...,p\}$ et $j \in \{1,2,...,n\}$. La différentielle de f au point a est alors la matrice Jacobienne de f au point a.
Réciproquement, si f est de classe $\mathscr{C}^1$ dans A alors f est différentiable en tout point de A.

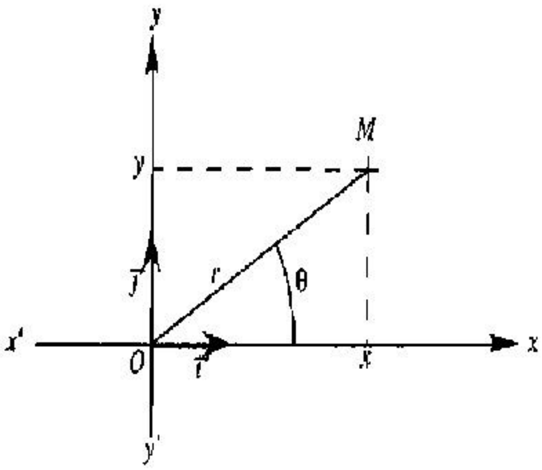
Le Jacobien

Définition 47 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application différentiable ou de classe $\mathscr{C}^1$ sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$*
Alors le jacobien de f est le déterminant de la matrice jacobienne $J_a(f)$ de f (C'est donc une application de D vers $\mathbb{R}$). noté $jac_f(x)$ Ce déterminant s'écrit :

$$jac_f(x) = \frac{D(f_1, f_2, ..., f_n)}{D(x_1, x_2, ..., x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{vmatrix} = det(J_a(f))$$

Remarque : Le jacobien d'une fonction ne peut être défini que si la dimension de l'espace de départ est égale à la dimension de l'espace d'arrivée, puisque seules les matrices carrées ont un déterminant.

exemple 1 (Coordonnées polaires)



On considère la fonction φ , définie sur une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

L'interprétation graphique de ce changement de variable est classique : pour un point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, r désigne la longueur du segment $[OM]$ et θ désigne une des mesures modulo 2π de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et la demi-droite $[OM)$. En utilisant les nombres complexes, il est intéressant de noter que

$$r = |x + iy| \quad \text{et} \quad \theta = arg(x + iy)[2\pi]$$

Les fonctions coordonnées de φ sont $\varphi_1 = r\cos(\theta)$ et $\varphi_2 = r\sin(\theta)$
Elles sont clairement indéfiniment continûment dérivables, donc φ est différentiable et sa matrice jacobienne est, en (r,θ) :

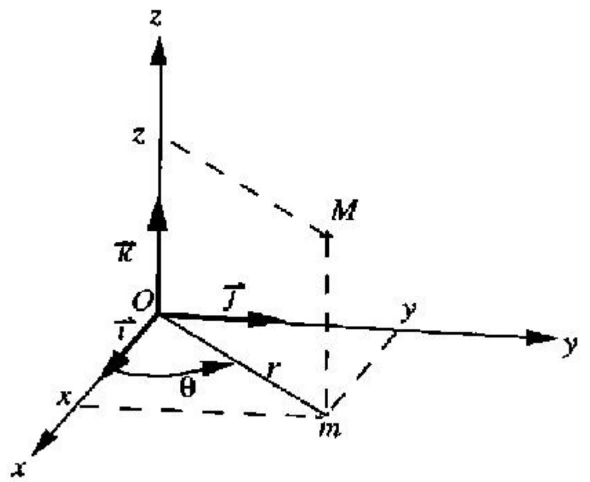
$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}(r,\theta) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$jac_\varphi(r,\theta) = det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

exemple 2 (Coordonnées cylindriques)

prendre les coordonnées cylindriques d'un point de l'espace rapporté à un repère orthonormé direct de l'espace consiste à remplacer les deux premières coordonnées (x, y) de ce point par les coordonnées polaires (r,θ).



Plus précisément, on considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$\varphi(r,\theta,z) = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$$

Il n'y a pas beaucoup de différences avec les coordonnées polaires. L'interprétation graphique est la suivante :

Si M est le point de coordonnées (x,y,z) dans le repère orthonormé direct de l'espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, et si M n'est pas un point de l'axe (Oz), on considère le projeté orthogonal m de M sur le plan (Oxy) ; r représente la longueur Om, et θest une mesure de l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{Om}$, le plan (Oxy) étant orienté par le vecteur $\overrightarrow{k}$, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = +\frac{\pi}{2}$.
L'application φ est évidemment de classe est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$ et est donc différentiable. Les fonctions coordonnées de φ sont $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ définies par :

$$\begin{cases} \varphi_1(r,\theta,z) = r\cos(\theta) \\ \varphi_2(r,\theta,z) = r\sin(\theta) \\ \varphi_3(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

Sa matrice jacobienne en (r,θ,z) est :

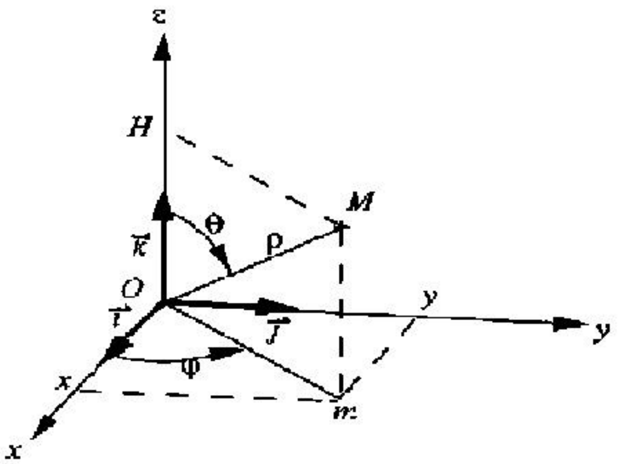
$$J_\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}(r,\theta,z) \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial r}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}(r,\theta,z) & \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}(r,\theta,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$jac_\varphi(r,\theta) = det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

exemple 3 (Coordonnées sphériques)

Ce changement de variable dans 3 est un peu plus difficile à manier que le précédent.



Commençons par son interprétation géométrique. On considère encore un point M, de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On suppose ici aussi que $M \notin (OZ)$, et on appelle m le projeté orthogonal de M sur le plan (Oxy), et H le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz).
On appellera ρ la longueur OM (à ne pas confondre avec $r = Om$ des coordonnées cylindriques).
θ c'est l'angle entre l'axe (Oz) orienté par $\overrightarrow{k}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Cet est toujours « positif» (il est compris entre 0 et π).
La troisième coordonnée est aussi un angle, c'est l'angle φ entre l'axe (Ox) orienté par $\overrightarrow{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{Om}$.

On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{OH}$
avec d'une part

$$\overrightarrow{OH} = \rho\cos(\theta)\overrightarrow{k}$$

et d'autre part,

$$\overrightarrow{Om} = \|Om\|(\cos(\varphi)\overrightarrow{i} + \sin(\varphi)\overrightarrow{j}$$

tandis que

$$\|Om\| = \rho\sin(\theta)$$

de sorte que finalement

$$\overrightarrow{OM} = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi)\overrightarrow{i} + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi)\overrightarrow{j} + \rho\cos(\theta)\overrightarrow{k}$$

C'est ce calcul qui justifie la définition rigoureuse des coordonnées sphériques :
On considère la fonction ϕ définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ (en fait, une partie de $\mathbb{R}^{*+} \times]0, \pi[\times \mathbb{R}$ par

$$\phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\sin(\theta)\cos(\varphi), \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \rho\cos(\theta))$$

Les fonctions coordonnées de ϕ sont (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3) avec :

$$\begin{cases} \phi_1(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \phi_2(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \phi_3(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\theta) \end{cases}$$

Ces fonctions sont évidemment indéfiniment continûment dérivables, donc ϕ est différentiable et sa matrice jacobienne en (ρ,θ,φ) est :

$$J_\phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_1}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_2}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_2}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial\rho}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_3}{\partial\theta}(\rho,\theta,\varphi) & \frac{\partial\phi_3}{\partial\varphi}(\rho,\theta,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de cette application est donc

$$jac_\phi(\rho,\theta,\varphi) = det(J_\phi(\rho,\theta,\varphi)) = \begin{vmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin(\theta)$$

4.1.2 Difféomorphisme :

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow V$ une application.

Définition 48 *On dit que f est un difféomorphisme si et seulement si :*

1. *f est bijective différentiable de U dans V*
2. *f ainsi que sa réciproque f^{-1} avec f^{-1} est bijective différentiable de V dans U*

Définition 49 *On dit que f est $\mathscr{C}^1$ - difféomorphisme de U si et seulement si :*

1. *f est bijective de U dans V*
2. *f est de classe $\mathscr{C}^1$ c'est à dire continûment différentiable sur U,*
3. *f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$ de V dans U*

et dans ce cas, l'application

$$a \mapsto jac_f(a)$$

est continue dans $\mathbb{R}$

Définition 50 *On dit que f est $\mathscr{C}^{k+1}$ - difféomorphisme de U si et seulement si :*

1. *f est bijective de U dans V*
2. *f est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur U,*
3. *f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^{k+1}$ sur V*

Remarque : Dans tous les cas on a $f(U) = V$ et $f^{-1}(V) = U$

Théoréme 33 *Si f est un difféomorphisme.*
La matrice Jacobienne de f^{-1} au point $f(a)$ est la matrice inverse de la matrice Jacobienne de f au point a.
En effet :

$$M(fof^{-1}) = M(f) \times M(f^{-1}) = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Où $Id_{\mathbb{R}^n}$ est la matrice identit´e sur $\mathbb{R}^n$.

Caractérisation

Propriété 1 Si $f \in \mathscr{L}(U,U)$ et P désigne la matrice de f dans la base canonique de U, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijection.
2. $detP \neq 0$

Propriété 2 Si f est un difféomorphisme alors :

1. $\forall a \in U$: $J_f(a)$ est inversible et $[J_f(a)]^{-1} = J_{f^{-1}}(f(a))$
2. Le jacobien ne s'annule pas.
   Autrement dit, $\forall a \in U$: $jac_f(a) \neq 0$
   $\forall a \in U$: $jac_{f^{-1}}(f(a)) = \frac{1}{jac_f(a)}$

Exemple 1

on considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[(x,y)\longmapsto(x+y,x-y)]{} \mathbb{R}^2$
Il est clair que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$. car les fonctions coordonnées sont des fonctions linéaires.
Montrons à présent que f définit une bijection.
Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (\alpha,\beta) \Leftrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{et} \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

On en déduit que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$
f est donc un $\mathscr{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2 (des coordonnées polaires)

Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^{*+} \times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\xrightarrow[(r,\theta)\longmapsto(x,y)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta))]{} \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$
l'application ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijection.
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$

$$\psi^{-1}(x,y) = (r,\theta) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x})$$

Soit $\psi^{-1} = \phi$
Soient (ϕ_1,ϕ_2) les fonctions coordonnées de ϕ Ce sont des fonctions indéfiniment continûment dérivables et on a

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi_1(x,y) = \theta = \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

ϕ est donc différentiable et on peut déterminer la matrice jacobienne de $\psi^{-1} = \phi$

$$J(\psi^{-1})(x,y) = J(\phi)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial\phi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Donc

$$J(\psi^{-1})(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} & \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant le Jacobien de ψ^{-1}

$$det(J(\psi^{-1})(x,y)) = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Comparons maintenant ce résultat avec ce qu'on avait obtenu pour $J(\psi)$ à savoir

$$J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

L'inverse de cette matrice est

$$(J_\varphi(r,\theta))^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -\frac{1}{r}\sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

D'autre part, en remplaçant x et y par leurs valeurs respectives $r\cos(\theta)$ et $r\sin(\theta)$ dans l'expression de $J(\phi)(x,y)$ on retrouve bien que

$$J(\phi)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{r\cos(\theta)}{r} & \frac{r\sin(\theta)}{r} \\ -\frac{r\sin(\theta)}{r^2} & \frac{r\cos(\theta)}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r}\sin(\theta) & \frac{1}{r}\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

De même, le Jacobien de ψ^{-1} est égal à $\frac{1}{r}$: c'est bien l'inverse du jacobien de ψ

4.1.3 Théorème d'inversion locale :

On considère une application f de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 38 *On suppose que f réalise un $\mathscr{C}^1$- difféomorphisme de U dans $V \subset \mathbb{R}^n$ Alors pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'inverse*

$$(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$$

Démonstration :
La démonstration repose simplement sur le calcul de la différentielle d'une fonction composée : On a $f^{-1} o f = Id_U$. En différentiant on obtient que pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

$$d_{f(a)} o d_a f = Id_{\mathbb{R}^n}$$

De même on a $f o f^{-1} = Id_V$ donc pour tout $b \in V$.

$$d_{f^{-1}(b)} f o d_b f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Avec $b = f(a)$ on obtient que

$$d_a f o d_{f(a)} f^{-1} = Id_{\mathbb{R}^n}$$

Cela prouve que $d_a f$ et $d_{f(a)} f^{-1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

Théoréme 34 ***(Théorème de l'inversion locale 1).***
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ (avec $k \geq 1$) d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
Soit $a \in U$. Si $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
Alors $n = p$ et il existe un voisinage W de a dans U tel que la restriction de f à W réalise un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de W dans $f(W)$.

Théoréme 35 ***(Théorème de l'inversion locale 2).***
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur U telle que la matrice jacobienne $J_f(a)$ est inversible.
Alors, il existe un voisinage V de a et un voisinage W de $f(a)$ tels que : $f : V \longrightarrow W$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

COROLLAIRE 3 *(Théorème de l'inversion globale).*
Soit f une application de l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ dans l'ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$, On suppose que f est bijective, de classe $\mathscr{C}^k$ et que pour tout $a \in U$ la différentielle $d_a f$ est un isomorphisme.
Alors f est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^k$ de U dans V

Exemple (les coordonées polaires)

Soit $\phi : \mathbb{R}^{*+} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, définie par

$$\phi(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)$$

Alors

1. ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$
2. ϕ est injective. En effet $\phi(r,\theta) = \phi(r',\theta') \Rightarrow r = r'$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$
   $\Rightarrow \quad r = r'$ et $\theta = \theta'$ Finalement $(r,\theta) = (r',\theta')$, donc ϕ est injective
3. pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $detj_\phi(r,\theta) \neq 0$
   en effet,
   $$j_\phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
   et donc
   $detj_\phi(r,\theta) = r \neq 0$

Le théorème d'inversion globale, nous affirme alors que ϕ est difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$

4.2 Fonctions implicites :

4.2.1 Fonctions implicites.

Le théorème d'inversion locale permet de résoudre l'équation $x = f(y)$ ou de manière équivalente $x - f(y) = 0$ pour y en fonction de x. De manière analogue, le théorème des fonctions implicites permet de résoudre l'équation

$$f(x,y) = 0$$

pour y en fonction de x. Si une telle solution existe, on dit que f définit y comme une application implicite de x.

Soient f une fonction numérique définie sur une partie D de $\mathbb{R}^2$; I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout point x de I il existe un point y et un seul de J tel que (x,y) appartienne à D et que

$$f(x,y) = 0 \tag{4.1}$$

La fonction numérique $\varphi : x \mapsto y$ ainsi définie satisfait donc pour tout point x de I à la relation

$$f(x,\varphi(x)) = 0 \tag{4.2}$$

On l'appelle fonction implicite définie par l'équation (4.1). On dit encore que y est fonction implicite de x.

Dans certains cas, on peut expliciter une fonction définie implicitement, c'est-à-dire exprimer cette fonction à l'aide des fonctions élémentaires.

Définition 51 *Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle.*
On appelle fonction implicite définie par l'équation : $f(x,y) = 0$
toute fonction

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \xrightarrow[x \longmapsto y=\varphi(x)]{} \mathbb{R}$$

définie sur un intervalle I telle que :

$$\forall x \in I, \quad f(x,\varphi(x)) = 0$$

Exemple.

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

Prenons $I = [-1;1]$ et $J = [0,+\infty[$ L'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{4.3}$$

définit y implicitement en fonction de x. Nous pouvons expliciter la fonction φ ; puisque

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$$

On ne peut prolonger φ ; puisque, dès que $|x| > 1$ l'équation (4.3) n'a pas de racine réelle.

Si on remplace J par $]-\infty,0[$, on définit une deuxième fonction implicite. Mais si on remplace J par $\mathbb{R}$, l'équation (4.3) admet deux solutions distinctes lorsque $|x| < 1$; elle ne définit plus y implicitement en fonction de x.

Le théorème suivant, que nous admettrons, garantit l'existence, la continuité et la dérivabilité des fonctions implicites sous certaines hypothèses. IL fournit même une expression explicite de la dérivée d'une fonction définie implicitement.

4.2.2 Théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{R}^2$

Théoréme 36 *(Théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{R}^2$.)*
Soient f une fonction numérique définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in D$ tel que

$$f(x_0, y_0) = 0$$

Si la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y continues sur D et si

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

il existe un intervalle ouvert I de centre x_0 et un intervalle ouvert J de centre y_0 tels que l'équation

$$f(x, y) = 0$$

définisse une fonction implicite φ sur I à valeurs dans J tel que

$$\varphi(x) = y$$

De plus, la fonction implicite φ ainsi définie est continûment dérivable sur I (ie de $\mathscr{C}^1(I)$), et sa dérivée est donnée par la formule

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}$$

Remarques :

1. $\left\{\begin{array}{l} f(x,y) = 0, \\ x \in I, y \in J \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = \varphi(x), \\ x \in I, y \in J, \end{array}\right.$
2. Si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur D alors φ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I
3. la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = x_0$ a pour équation $y = \varphi'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Calculs de dérivées de fonctions implicites

Exemple 1 :
Considérons encore la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Remarquons que

$$f(0, 1) = 0$$

et que f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 2 \neq 0$$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, ils existent un intervalle ouvert I de centre 0,et un intervalle ouvert J de centre 1 tels que l'équation

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

définisse implicitement une fonction $\varphi : I \to J$ continûment dérivable sur I, à valeur dans J tels que :

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ x \in I, y \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\varphi(x), \\ x \in I, y \in J, \end{cases}$$

La dérivée de φ est donnée par la formule

$$\varphi^{'}(x) = -\frac{2x}{2\varphi(x)} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

Nous pouvons calculer directement cette dérivée, puisque

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$$

d'où

$$\varphi^{'}(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>**Exemple 2 :**</u>

Considérons la fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = x^y - y^x$$

définit implicitement y en fonction de x lorsque x est au voisinage de $x_0 = 1$ et que y est au voisinage de $y_0 = 1$. En effet,

$$f(1,1) = 0$$

f est dérivable par rapport à y sur $(\mathbb{R}^{*+})^2$ et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \ln(x) - xy^{x-1}$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$$

et par suite l'équation : $f(x,y)=0$ définit implicitement y en fonction de x lorsque x est au voisinage de 1 et que y est au voisinage de 1.
De plus,

$$\varphi^{'}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y) = -\frac{yx^{y-1} - y^x \ln(y)}{x^y \ln(x) - xy^{x-1}}$$

Nous pouvons simplifier cette expression en divisant numérateur et dénominateur par $x^y = y^x$ il reste

$$\varphi^{'}(x) = -\frac{\frac{y}{x} - \ln(y)}{\ln(x) - \frac{x}{y}} = \frac{y}{x} \times \frac{y - x\ln(y)}{x - y\ln(x)}$$

4.2.3 Théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{R}^3$

Théoréme 37 *(Théorème des fonctions implicites sur $\mathbb{R}^3$.)*
Soient f une fonction numérique définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^3$ et $(x_0, y_0, z_0) \in D$ tel que

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Si la fonction f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y et à z continues sur D (ie f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur D).
et si

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Alors il existe un ouvert V contenant (x_0, y_0); et un ouvert W contenant (x_0, y_0, z_0) tels que l'équation

$$f(x, y; z) = 0$$

définisse une fonction implicite φ sur V à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que :

$$\forall (x, y, z) \in W : \quad f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in V \quad z = \varphi(x, y)$$

De plus,

$$\forall (x, y, z) \in W : \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y, z) = x + y + z + \sin(xyz)$
La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et vérifie $f(0,0,0) = 0$ et sa dérivée partielle par rapport à z est :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 + xy\cos(xyz)$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 1 \neq 0$$

Donc le théorème des fonctions implicites s'applique. Il existe donc un voisinage D de $(0,0)$ et un intervalle ouvert Icontenant 0 et une fonction $\varphi : D \longrightarrow I$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que

$$\forall (x, y, z) \in D \times I, \quad f(x; y; z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi(x, y)$$

On peut calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$
par la formule du cours :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \varphi(x, y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, \varphi(x, y))}$$

ou bien en partant de la relation :

$$x + y + \varphi(x, y) + \sin(xy\varphi(x, y)) = 0$$

et en la dérivant de φ par rapport à x Il vient

$$1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + y\varphi(x, y)\cos(xy\varphi(x, y)) + xy\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)\cos(xy\varphi(x, y)) = 0$$

On évalue cette relation en $(0,0)$ et on trouve

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = -1$$

Le calcul de la dérivée partielle de φ par rapport ày est :

$$1+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)+x\varphi(x,y)\cos(xy\varphi(x,y))+xy\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\cos(xy\varphi(x,y))=0$$

On évalue cette relation en $(0,0)$ et on trouve

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0)=-1$$

4.2.4 Les courbes implicites :

Soit $f: D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ avec $(k\geq 1)$ où D est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 52 *La courbe (implicite) d'équation* $f(x,y)=0$ *est l'ensemble des points* $(x,y)\in D$ *vérifiant* $f(x,y)=0$.
on note L'ensemple :

$$\mathscr{T}=\{(x,y)\in D;\quad \textit{tel que}\quad f(x,y)=0\}$$

est appelé la courbe implicite définie par : $f\equiv 0$.

Plus généralement , une courbe définie par $f(x,y)=k$ est appelée une courbe de niveau k.

Définition 53 1. *Un point* $M(x,y)\in\mathscr{T}$ *est dit « ordinaire » (ou régulier) si*

$$(\nabla f(M))^t=(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y);\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))\neq(0,0)$$

2. *La courbe* $\mathscr{T}$ *est dite régulière si* $(\nabla f(M))^t\neq(0,0)\quad\forall M\in\mathscr{T}$
3. *Le point M est dit singulier si* $(\nabla f(M))^t=(0,0)$

4.2.5 Tangente et Normale à la courbe implicite :

Soit $f: D\subset\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $(x_0,y_0)\in D$ tels que :

$$f(x_0,y_0)=0\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$$

Donc l'équation $f(x,y)=0$ définit sur un voisinage W de (x_0,y_0) une courbe $\mathscr{T}$ qui est un graphe d'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^1$.
De plus,

$$\forall(x,y)\in W,\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\neq 0\quad\text{et}\quad\varphi'(x)=-\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}$$

Par suite $\mathscr{T}$ admet en chaque point $M(x',y')$ une tangente (T) est la droite d'équation :

$$\text{T}:\quad(x-x')\frac{\partial f}{\partial x}(x',y')+(y-y')\frac{\partial f}{\partial y}(x',y')=0$$

<u>Remarque :</u>

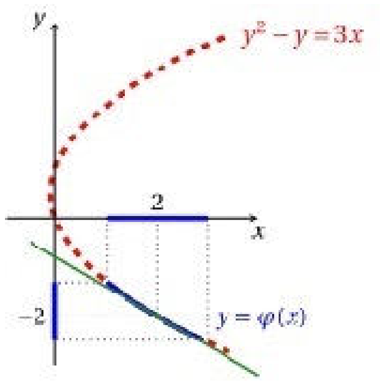
1-$\overrightarrow{\tau}(M)=(-\frac{\partial f}{\partial y}(x',y');\frac{\partial f}{\partial x}(x',y'))^t$ le vecteur directeur de $(\mathscr{T})$

2- tout vecteur parallèle au vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x}(x',y'),\frac{\partial f}{\partial y}(x',y'))^t$ s'appelle la normale à (T) au point $M(x',y')$ noté $\overrightarrow{N}(M)$
C'est à dire que : $\overrightarrow{N}(M)$ est colinéaire à $\nabla f(M)$

Exemple

La fonction $y^2-y=3x$ définie implicitement au voisinage de $(2,-2)$ une fonction $y=\varphi(x)$. La droite tangente au graphe de la courbe d'équation $y=\varphi(x)$ a équation

$$y=(x-2)\frac{-\frac{\partial f(2,\varphi(2))}{\partial x}}{\frac{\partial f(2,\varphi(2))}{\partial y}}+(-2)=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}$$



Surfaces implicites

Soit $f:D\subset\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ où D est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^3$.

Définition 54 *La surface implicite d'équation $f(x,y,z)=0$ est l'ensemble des points $(x,y,z)\in D$ vérifiant $f(x,y,z)=0$.*
on note L'ensemple :

$$\mathscr{T}'=\{(x,y,z)\in D;\quad \textit{tel que}\quad f(x,y,z)=0\}$$

est appelé La surface implicite définie par : $f\equiv 0$.

Définition 55 *(Point régulier)*
Soit $\mathscr{T}'$ la courbe d'équation $f(x,y,z)=0$. On dit qu'un point $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{T}'$ est régulier si

$$(\nabla f((x_0,y_0,z_0)))^t=(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0);\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0);\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0))\neq(0,0,0)$$

Dans le cas contraire, on dit que le point $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{T}'$ est singulier.

Définition 56 *(Plan tangent)*
Soit $\mathscr{T}'$ la surface d'équation $f(x,y,z)=0$. Le plan tangent à la surface $\mathscr{T}'$ en un point régulier $(x_0,y_0,z_0)\in\mathscr{T}'$ est le plan d'équation

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$$

Remarque

Le plan tangent $\mathscr{T}'$ à en un point régulier $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{T}'$ est le plan orthogonal au vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ et passant par le point (x_0, y_0, z_0).

Exemple

Soit T la surface d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$ Le plan tangent $\mathscr{P}$ à T au point $(1, -1, 1)$ admet pour équation $x - y + z = 3$. On peut tracer T et $\mathscr{P}$ sur un même graphique.